ГЛАВА 4

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

4.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ

Получаемые при компьютерных вычислениях, в экспериментальных исследованиях или задаваемые при проектировании элементов конструкций летательных аппаратов сеточные (табличные) функции

$$y_i = f(x_i),\ \ x_i \in [a,b],\ \ i = \overline{0,n},$$

малоинформативны. Они определены только в *узлах* x_i $(i = \overline{0,n})$ *сетки* Ω_n, а их значения в промежуточных точках, а также значения производных в узлах не известны, интегралы от них нельзя вычислить классическими методами. Каждая сетка характеризуется шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ неравномерного или ($h_{i+1} = \text{const}$) равномерного разбиения.

Однако значения функции должны быть известны при любом значении аргумента $x \neq x_i$, а в самих узлах x_i требуется знать также первые и вторые производные, поэтому сеточные функции $y_i = f(x_i)$ необходимо *восполнять*. Данная проблема решается с помощью методов *теории приближений* (*теории аппроксимации*) — одного из важнейших разделов численного анализа.

Для восполнения исходных (*аппроксимируемых*) функций $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, искомыми (*аппроксимирующими*) функциями $\tilde{y} = \tilde{f}_m(x,\bar{a})$, как правило, используются алгебраические многочлены

$$\tilde{f}_m(x,\bar{a}) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m, \tag{4.1}$$

где $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T$ — вектор неизвестных параметров, m — степень многочлена, подлежащие выбору или определению (обычно $m \le n$).

Замечания

1. Аппроксимация тригонометрическими многочленами с помощью рядов Фурье изучается в классических курсах математического анализа. Алгебраические многочлены являются частным случаем обобщенных многочленов, рассматриваемых в п. 4.4. Все понятия, вводимые в данном разделе, справедливы и для обобщенных многочленов.

2. Иногда в качестве аппроксимируемых функций берутся сложные формульные функции $y = f(x)$, которые желательно заменить более простыми.

Методы приближения различаются выбором различных по характеру *условий согласования* функций $\tilde{f}_m(x,\bar{a})$ и $y_i = f(x_i)$. В данной книге рассматриваются два типа условий согласования — *точечные* (*дискретные*) и *интегральные*.

Применительно к некоторой точке x_i сетки $\Omega_n = \{x_i, i = \overline{0,n}\}$ *дискретные условия согласования* записываются в виде нулевых невязок искомой функции и ее производных:

$$\delta\tilde{f}_m^{(p)}(x_i,\bar{a}) = \tilde{f}_m^{(p)}(x_i,\bar{a}) - f^{(p)}(x_i) = 0, \tag{4.2}$$

где p — порядок производной. При $p = 0$ условие (4.2) является *функциональным* и оно традиционно называется *условием интерполяции*:

$$\delta\tilde{f}_m(x_i,\bar{a}) = \tilde{f}_m(x_i,\bar{a}) - f(x_i) = 0. \tag{4.3}$$

Возможны два типа *интегральных условий*:

$$1)\ \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[\tilde{f}_m(x_i,\bar{a}) - f(x_i)\right]^2} \to \min_{\bar{a}} \quad (m \le n); \tag{4.4}$$

$$2)\ \delta\tilde{f}\left(I_{x_i}^{x_{i+1}}\right) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}_m(x,\bar{a})\,dx - I_i^{i+1} = 0$$

или (4.5)

$$\delta\tilde{f}\left(I_{x_0}^{x_i}\right) = \int_{x_0}^{x_i} \tilde{f}_m(x,\bar{a})\,dx - I_0^i = 0, \tag{4.5}$$

где $I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$, $I_0^i = \int_{x_0}^{x_i} f(x)dx$. Условие (4.4) выражает минимум *среднеквадратичной погрешности* (или отклонения) представления заданной сеточной функции $f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, с помощью аппроксимирующей функции $\tilde{f}_m(x,\bar{a})$. Оно относится, как правило, ко всей области определения функции $f(x_i)$, т. е. к отрезку $[a, b]$. Сомножитель $\dfrac{1}{n+1}$ иногда опускают, так как его наличие или отсутствие влияет только на величину погрешности, но не влияет на вектор $\bar{a}$, обеспечивающий ее минимум. Условие (4.5) может относиться как к одному частичному отрезку $[x_i, x_{i+1}]$, так и к отрезку $[x_0, x_i]$, а также ко всему отрезку $[a, b]$. Условие (4.5) в одномерном случае, когда функция $f(x)$ зависит только от x, выражает равенство площадей под кривыми $f(x)$ и $\tilde{f}_m(x,\bar{a})$. В двумерном случае, когда функция зависит от двух переменных, условие (4.5) обобщается и выражает равенство объемов (аппроксимация таких функций здесь не рассматривается). Таким образом, применение условия (4.5) приводит к сохранению интегральных свойств аппроксимируемой функции, а также предоставляет исследователям новые ранее неиспользуемые возможности при построении новых нетрадиционных методов решения задач аппроксимации [15], [16], [19–21].

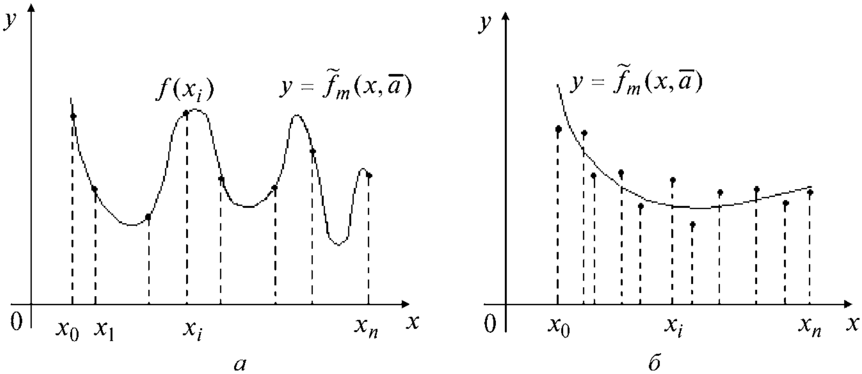


Рис. 4.1

Метод приближения, построенный на базе условия (4.3), будем называть *методом интерполяции*, или *функциональным методом* (рис. 4.1*а*).

Метод, использующий условие (4.2) при $p > 0$, называется *дифференциальным*.

Если совместно с условием (4.2) применяется интегральное условие, метод называется *интегрально-дифференциальным*.

Метод, построенный на базе условия (4.3) и интегрального условия, называется *интегрально-функциональным*. Методы приближения, сконструированные только на базе условия (4.4) или (4.5), выполняют сглаживание исходной функции (рис. 4.1*б*) и поэтому называются методами *сглаживания* (*интегрального сглаживания*).

Если условия (4.5) используются отдельно, метод сглаживания называется *восстанавливающим*, а если совместно с условиями (4.3), то — *интерполяционно-сглаживающим*.

Названия многочленов, получаемых в результате применения методов, соответствуют названиям этих методов.

Можно выделить четыре способа применения методов аппроксимации, отличающихся областями их «действия».

1. *Глобальный* способ, в котором для всей области $\Omega \equiv [a, b]$ определяется одна функция $\tilde{f}_m(x,\bar{a})$.

2. *Локальный* способ, когда функция восполняется только в окрестности некоторой точки x_i. Это восполнение обычно осуществляется на основе формулы Тейлора. Данный способ рассматривается в курсе математического анализа.

3. *Кусочный* способ, когда ищется одна или несколько функций $\tilde{f}_{ki}(x,\bar{a})$, $i = 0, 1, \ldots$, каждая из которых является многочленом степени k и имеет область определения в виде частичного отрезка $\Omega_{ik} = [x_i,\ x_{i+k}]$ $(1 \le k < n$, $k = 1, 2, \ldots)$, называемого «окном» аппроксимации, которое составляет *шаблон* $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$. Саму функцию $\tilde{f}_{ki}(x,\bar{a})$, построенную на одном шаблоне, будем называть *звеном*.

4. *Кусочно-глобальный* способ, в котором область Ω представляется совокупностью N частичных отрезков Ω_{ik}, таких, что $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_{ik}$. На первом этапе

на каждом из отрезков ищется функция $\tilde{f}_{ki}(x,\bar{a})$ — i-е звено с применением кусочного способа аппроксимации. На следующем этапе производится объединение всех звеньев в одну многозвенную функцию, т. е. $\tilde{f}_k(x,\bar{a}) = \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{f}_{ki}(x,\bar{a})$. Данный способ применяется, например, в п. 4.5 при построении сплайнов.

4.2. МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

4.2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на множестве $\Omega = [a, b]$ задана сетка $\Omega_n = \{x_i, i = \overline{0,n}\}$, определяемая $n + 1$ точкой $x_0, x_1, \ldots, x_n$, а на сетке задана сеточная функция $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$:

$$y_0 = f(x_0),\ \ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ \ y_n = f(x_n). \tag{4.6}$$

В некоторых случаях $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, является сеточным представлением заданной формульной функции $y = f(x)$. Сеточная функция может задаваться совокупностью пар: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Требуется найти функцию $y = F(x)$, принимающую в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ те же значения, что и функция $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, т. е. $F(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$.

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называются *узлами интерполяции*, а искомая функция $y = F(x)$ — *интерполирующей*.

Геометрически это означает, что нужно найти кривую, проходящую через заданное множество точек (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$ (рис. 4.2).

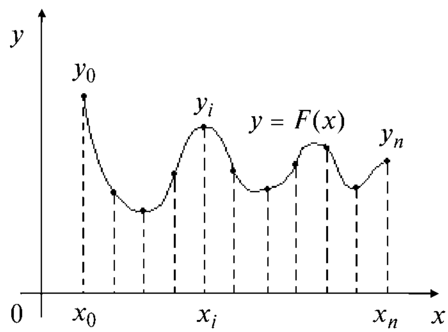


Рис. 4.2

Одной из целей задачи интерполяции является вычисление значения функции в произвольной точке x_*. При этом различаются собственно *интерполирование*, когда точка $x_* \in [x_0, x_n]$, и *экстраполирование*, когда $x_* \notin [x_0, x_n]$.

Заметим, что можно провести бесчисленное множество «плавных» кривых, проходящих через заданное множество точек. Поэтому задача интерполяции в общей постановке не имеет единственного решения.

Если в качестве интерполирующей функции выбрать алгебраический многочлен, степень которого связана с числом заданных узлов интерполяции (на единицу меньше), решение задачи является единственным. Покажем это.

Воспользуемся сначала *кусочным способом*. Выделим из отрезка $[x_0, x_n]$ частичный отрезок $[x_i, x_{i+k}]$ и рассмотрим сеточную функцию $y_i = f(x_i)$, заданную в $(k + 1)$-м узлах $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ (узлы не совпадают):

$$y_i = f(x_i),\ \ y_{i+1} = f(x_{i+1}),\ \ldots,\ \ y_{i+k} = f(x_{i+k}). \tag{4.7}$$

В качестве интерполирующей функции выберем алгебраический многочлен k-й степени (степень многочлена на единицу меньше количества узлов):

$$F(x) = \tilde{f}_k(x, \overline{a}) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k. \quad (4.8)$$

Будем искать неизвестные коэффициенты a_0, a_1, ..., a_k из условия интерполяции (4.3) , т. е. $\delta\tilde{f}_k(x_i, \overline{a}) = 0$:

$$\tilde{f}_k(x_i, \overline{a}) = y_i, \ \ \tilde{f}_k(x_{i+1}, \overline{a}) = y_{i+1}, \ldots, \ \ \tilde{f}_k(x_{i+k}, \overline{a}) = y_{i+k}. \quad (4.9)$$

Теорема 4.1 (о единственности решения задачи интерполяции).

Задача о нахождении интерполяционного многочлена $\tilde{f}_k(x, \overline{a}) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$, *удовлетворяющего условиям* (4.9), *на частичном отрезке* $[x_i, x_{i+k}]$ *по заданной сеточной функции* (4.7) *имеет единственное решение*.

Доказательство. Запишем условия интерполяции (4.9) с учетом (4.8) и обозначения $y_i = f(x_i) = f_i$:

$$\begin{gathered}
a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_k x_i^k = f_i, \\
a_0 + a_1 x_{i+1} + a_2 x_{i+1}^2 + \ldots + a_k x_{i+1}^k = f_{i+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0 + a_1 x_{i+k} + a_2 x_{i+k}^2 + \ldots + a_k x_{i+k}^k = f_{i+k}.
\end{gathered} \quad (4.10)$$

Эта система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_0, a_1, ..., a_k имеет единственное решение, так как определитель матрицы системы

$$C_k(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & \ldots & x_i^k \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \ldots & x_{i+1}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{i+k} & x_{i+k}^2 & \ldots & x_{i+k}^k \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

не равен нулю (доказательство последнего факта содержится в курсе линейной алгебры, где этот определитель называется определителем Вандермонда). Следовательно, задача интерполяции также имеет единственное решение.

Полагая $i = 0$, $k = n$, приходим к *глобальному способу* решения поставленной задачи. А именно, если задана сеточная функция в $(n + 1)$-м узлах x_0, x_1, ..., x_n и требуется найти алгебраический многочлен с использованием условий интерполяции, то единственным решением задачи интерполяции является интерполяционный многочлен n-й степени:

$$F(x) = \tilde{f}_n(x, \overline{a}) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad (4.12)$$

коэффициенты которого находятся из системы (4.10) при $i = 0$, $k = n$.

Замечания

1. Матрица (4.11) имеет дискретный (точечный) характер, так как ее элементы вычисляются по дискретным значениям x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}.

2. При решении поставленной задачи предполагается, что исходная сеточная функция задана своими точными значениями, хотя класс задач, для которых используются такие функции, ограничен.

3. Имеются и другие формы записи интерполяционных многочленов. По теореме 4.1 все эти многочлены степени n, удовлетворяющие функциональным условиям интерполяции и построенные по одним и тем же точкам, являются одним многочленом, записанным в разных формах.

4. При большом числе узлов решение системы (4.10) затруднительно. Искомый интерполяционный многочлен можно построить, не решая этой системы. Многочлены могут быть построены так, чтобы в самой структуре формулы многочлена условие интерполяции учитывалось (см. п. 4.2.2 и 4.2.3).

5. При решении задачи функциональной интерполяции и в ее приложениях требуется:

а) выбрать наиболее удобную форму и степень интерполяционного многочлена. При этом можно использовать многочлены Лагранжа (см. п. 4.2.2) или Ньютона (см. п. 4.2.3), а также формулу (4.8);

б) оценить погрешность интерполяции;

в) определить значения функции в точках, не совпадающих с узлами;

г) вычислить значения производных или определенных интегралов с использованием полученных интерполяционных многочленов.

Методика решения задачи интерполяции

1. По заданной сеточной функции составить интерполяционный многочлен определенной степени. При выборе степени многочлена следует руководствоваться желаемой точностью интерполяции.

2. Вычислить значения интерполяционного многочлена в заданных точках x_{*j}, $j = 1, \ldots, p$, путем их подстановки в формулу многочлена.

4.2.2. МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА

Пусть исходная сеточная функция задана в $(n + 1)$-й точках сетки Ω_n: $y_i = f(x_i)$ $i = \overline{0, n}$, где $x_i \in [a, b] = [x_0, x_n]$ — в общем случае неравноотстоящие узлы, определяемые шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ $(h_{i+1} = \text{var})$.

Воспользуемся сначала *кусочным способом*. Здесь и далее будем использовать обозначение $f_i = f(x_i)$.

Выделим «окно» или частичный отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, содержащий только две точки (шаблон (x_i, x_{i+1})). Тогда многочлен Лагранжа, интерполирующий исходную функцию на данном шаблоне, имеет вид

$$L_1(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} = P_{1i}(x) \cdot f_i + P_{1i+1}(x) \cdot f_{i+1}, \tag{4.13}$$

где $P_{1i}(x)$, $P_{1i+1}(x)$ — коэффициенты.

Действительно, путем подстановки легко убедиться в том, что $L_1(x)$ — алгебраический многочлен первой степени, который удовлетворяет условиям функциональной интерполяции (4.3), т. е. $L_1(x_i) = f_i$, $L_1(x_{i+1}) = f_{i+1}$.

Выделим «окно» в виде двойного частичного отрезка $[x_i, x_{i+2}]$ с шаблоном (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}). Тогда многочлен Лагранжа записывается в виде

$$L_2(x)=\frac{(x-x_{i+1})\cdot(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})\cdot(x_i-x_{i+2})}f_i+\frac{(x-x_i)\cdot(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)\cdot(x_{i+1}-x_{i+2})}f_{i+1}+$$
$$+\frac{(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)\cdot(x_{i+2}-x_{i+1})}f_{i+2}=P_{2i}(x)\cdot f_i+P_{2i+1}(x)\cdot f_{i+1}+P_{2i+2}(x)\cdot f_{i+2}, \qquad (4.14)$$

где $P_{2i}(x)$, $P_{2i+1}(x)$, $P_{2i+2}(x)$ — коэффициенты.

Легко проверить, что (4.14) — многочлен второй степени и также удовлетворяет условиям функциональной интерполяции:

$$L_2(x_i)=f_i;\;\; L_2(x_{i+1})=f_{i+1};\;\; L_2(x_{i+2})=f_{i+2}.$$

Обобщив запись многочлена на «окно» для k-кратного частичного отрезка $[x_i, x_{i+k}]$ с шаблоном $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$, можно записать многочлен Лагранжа в виде

$$L_k(x)=\sum_{m=i}^{i+k}\frac{(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{m-1})\cdot(x-x_{m+1})\ldots(x-x_k)}{(x_m-x_i)\cdot(x_m-x_{i+1})\ldots(x_m-x_{m-1})\cdot(x_m-x_{m+1})\ldots(x_m-x_k)}f_m=$$
$$=\sum_{m=i}^{i+k}P_{km}(x)\cdot f_m, \qquad (4.15)$$

где $P_{km}(x)$ — *коэффициенты Лагранжа*, которые для внутренних точек шаблона записываются следующим образом:

$$P_{km}(x)=\frac{(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{m-1})\cdot(x-x_{m+1})\ldots(x-x_k)}{(x_m-x_i)\cdot(x_m-x_{i+1})\ldots(x_m-x_{m-1})\cdot(x_m-x_{m+1})\ldots(x_m-x_k)}.$$

Легко проверить, что $P_{km}(x)$ удовлетворяют условию

$$P_{km}(x_j)=\begin{cases}1, & j=m,\\ 0, & j\neq m,\end{cases}\quad i\le j\le i+k. \qquad (4.16)$$

Если положить $i = 0$, $k = n$, то приходим к *глобальному способу* решения задачи. Тогда *интерполяционный многочлен Лагранжа n-й степени* имеет вид

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}f_i=\sum_{i=0}^{n}P_{ni}(x)\cdot f_i, \qquad (4.17)$$

где *коэффициенты Лагранжа* $P_{ni}(x)$ во внутренних точках отрезка записываются в форме

$$P_{ni}(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Очевидно, многочлен $L_n(x)$, заданный равенством (4.17), является многочленом степени n и удовлетворяет функциональным условиям интерполяции (4.3): $L_n(x_i) = f_i$, $i=\overline{0,n}$.

Для записи интерполяционного многочлена Лагранжа удобно пользоваться таблицей 4.1.

Тогда многочлен Лагранжа может быть записан в форме

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f_i}{D_i}. \qquad (4.18)$$

Замечания

1. Если заданная сеточная функция такая, что $f_i = 1$ $(i = \overline{0,n})$, то из (4.17) следует, что $L_n(x) \equiv 1$, и поэтому справедливо равенство $\sum_{i=0}^{n} P_{ni}(x) = 1$ (сумма всех коэффициентов Лагранжа в точке x равна единице), которое можно использовать для контроля правильности расчетов.

2. Коэффициенты Лагранжа $P_{ni}(x)$ для некоторой функции $y_i = f(x_i)$ определяются лишь узлами сетки и точкой x, в которой необходимо вычислить значение многочлена. Если в некоторой точке x_* требуется определить значения нескольких интерполируемых функций $f_1(x_i)$, $f_2(x_i)$, ... $(i = \overline{1,n})$, то коэффициенты Лагранжа для всех исходных функций подсчитываются только один раз.

3. При введении дополнительных узлов интерполяции все коэффициенты многочлена Лагранжа необходимо пересчитывать заново, что неудобно на практике. От этого недостатка свободны многочлены Ньютона (см. п. 4.2.3).

Перейдем к рассмотрению примеров решения задачи интерполяции на основе вышеизложенной методики.

Пример 4.1. Построить многочлен Лагранжа третьей степени для сеточной функции, заданной таблицей 4.2. Вычислить значение функции в точке $x_* = 2{,}5$. Для записи многочлена использовать формулу (4.18).

□1. Построим многочлен Лагранжа. Для этого составим таблицу 4.3, соответствующую таблице 4.1.

Таблица 4.1

$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	...	$x_0 - x_n$	D_0	f_0
$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_1 - x_n$	D_1	f_1
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	...	$x_2 - x_n$	D_2	f_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	...	$x - x_n$	D_n	f_n
$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$					D_i	f_i

Примечания. D_i — произведение элементов i-й строки, $\Pi_{n+1}(x)$ — произведение элементов главной диагонали, $y_i = f(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Таблица 4.2

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
$f(x_i) = f_i$	7	5	8	7

Таблица 4.3

$x - 2$	-1	-2	-3	$-6 \cdot (x - 2)$	7
1	$x - 3$	-1	-2	$2 \cdot (x - 3)$	5
2	1	$x - 4$	-1	$-2 \cdot (x - 4)$	8
3	2	1	$x - 5$	$6 \cdot (x - 5)$	7
$\Pi_4(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$				D_i	f_i

По формуле (4.18) получаем:

$$L_3(x) = \Pi_4(x)\sum_{i=0}^{3}\frac{f_i}{D_i} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\cdot 7}{-6\cdot(x-2)} + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\cdot 5}{2\cdot(x-3)} +$$

$$+\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\cdot 8}{-2\cdot(x-4)} + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\cdot 7}{6\cdot(x-5)} =$$

$$= -\frac{7}{6}\cdot(x-3)(x-4)(x-5) + \frac{5}{2}\cdot(x-2)(x-4)(x-5) - 4\cdot(x-2)(x-3)(x-5) +$$

$$+\frac{7}{6}\cdot(x-2)(x-3)(x-4) = -\frac{3}{2}x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2}x + 62.$$

2. Вычислим значение функции в заданной точке: $L_3(2{,}5) = 4{,}8125$.■

ПОГРЕШНОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЛАГРАНЖА

При определении значения $f(x)$, $x \neq x_i$, для функции $y_i = f(x_i)$ $(i = \overline{0,n})$ с помощью многочлена Лагранжа возникает *погрешность* или *остаточное слагаемое* $R_n(x)$:

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x). \tag{4.19}$$

Здесь предполагается, что используется глобальный способ интерполяции и что $f(x) \in C_{n+1}[a, b]$. Последнее предположение требуется для применения соответствующих теорем математического анализа, однако приведенное ниже соотношение для $R_n(x)$ может использоваться и для сеточных функций.

На основе указанных предположений доказано [2], [6], [14], что при интерполяции функции $y_i = f(x_i)$, заданной в общем случае на неравномерной сетке Ω_n, интерполяционным многочленом Лагранжа $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_{ni}(x) f_i$ для произвольного значения $x \in (x_0, x_n)$ возникает погрешность

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x), \tag{4.20}$$

где $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ — многочлен $(n + 1)$-й степени, а $\xi \in (a, b)$.

Поскольку точно найти $R_n(x)$ нельзя (из-за неопределенности точки ξ), то при проведении вычислений обычно находятся только приближенные оценки погрешностей интерполяции, которые являются априорными.

Оценка погрешности интерполяции в некоторой произвольной фиксированной точке $x_* \in [a, b]$ имеет вид

$$|f(x_*) - L_n(x_*)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x_*)|, \tag{4.21}$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$.

Оценка максимальной погрешности интерполяции в любой точке $x \in [a, b]$, т. е. на всем отрезке $[a, b]$:

$$|f(x)-L_n(x)|\le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{[a,b]}|\omega_n(x)|. \qquad (4.22)$$

Замечание. Для сеточных функций с фиксированными узлами сетки (узлами интерполяции) также можно проводить оценки погрешности по формулам (4.21), (4.22), однако для этого необходимо численно определять M_{n+1} с помощью аппарата численного дифференцирования. При этом следует учитывать, что при вычислении производных высокого порядка возникают большие погрешности (см. главу 5).

Пример 4.2. С какой точностью можно вычислить значение $f(x)=\sqrt{x}\,|_{x_*=85}$, если вычисления производить на основе интерполяционного многочлена Лагранжа первой и второй степени, а в качестве сеточной функции принять $(x_i, y_i) = \{(16; 4), (36; 6), (100; 10)\}$, $(i = 0, 1, 2)$?

□Так как требуется вычислить погрешность только в одной точке $x_* = 85$, то необходимо использовать формулу (4.21).

Найдем оценку погрешности в точке $x_* = 85$ для $L_1(x)$. В качестве «окна» линейной интерполяции ($n = 1$) выбираем отрезок $[x_1, x_2] = [36; 100]$. Определим величину M_2:

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};\;\; f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}};\;\; M_2=\max_{[36;100]}|f''(x)|=\frac{1}{4\sqrt{36^3}}=\frac{1}{864}.$$

Тогда

$$\omega_1(x_*)=(85-36)(85-100)=-735;\;\; |R_1(x)|\le\frac{M_2}{(n+1)!}\cdot|\omega_1(x_*)|=\frac{735}{2\cdot 864}=0{,}425.$$

Найдем оценку погрешности в точке x_* для $L_2(x)$. В качестве «окна» квадратичной интерполяции ($n = 2$) выбираем отрезок $[x_0, x_2] = [16; 100]$. Определим величину M_3:

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}};\quad M_3=\max_{[16;100]}|f'''(x)|=\frac{3}{8\sqrt{16^5}}=\frac{1}{2730{,}7}.$$

Тогда

$$\omega_2(x_*)=(85-16)(85-36)(85-100)=-50715;\;\; |R_2(x)|\le\frac{M_3}{(n+1)!}|\omega_2(x_*)|=3{,}1.$$

Погрешность для многочлена $L_2(x)$ получилась больше погрешности для многочлена $L_1(x)$, что обусловлено величиной $\omega_2(x_*)$.■

О СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Как отмечалось выше (см. п. 4.2.1), выбор сетки и соответствующей степени интерполяционного многочлена при интерполяции сеточных функций является одной из важных задач, решить которую можно, рассмотрев проблему сходимости интерполяционных процессов [6], [40] для непрерывных функций $y = f(x) \in C_{n+1}[a, b]$.

Будем считать, что интерполяция проводится на последовательности сеток $\Omega_1 = \left\{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\right\}$, $\Omega_2 = \left\{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right\}$, ... $\Omega_n = \left\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\right\}$ с возрастающим разбиением k отрезка $[a, b]$: $k_1 = 1$; $k_2 = 2$; ...; $k_n = n$ и т. д.

Если при данных разбиениях при возрастающем $k = 1, 2, \ldots n, \ldots$ определяются значения $L_k(x_*)$ в некоторой промежуточной точке x_*, то реализуется интерполяционный процесс, характеризующийся последовательностью значений многочленов: $L_1(x_*)$, $L_2(x_*)$, ..., $L_n(x_*)$, ...

Интерполяционный процесс для функции $f(x)$ *сходится в точке* $x_* \in [a, b]$, если существует $\lim\limits_{k\to\infty} L_k(x_*) = f(x_*)$ (*поточечная сходимость*).

Для отрезка $[a, b]$ существует понятие *равномерной сходимости* в некоторой норме, например $\max\limits_{\substack{x\in[a,b]\\ n\to\infty}} |f(x) - L_n(x)| \to 0$.

Характер сходимости или расходимости интерполяционного процесса зависит как от гладкости и поведения функции $f(x)$, так и от выбора последовательности сеток Ω_n ($n = 1, 2, \ldots$). Так, показано, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется такая последовательность Ω_n ($n = 1, 2, \ldots$), для которой интерполяционный процесс сходится равномерно на $[a, b]$ (теорема Марцинкевича [40]). Однако для дискретных функций, рассматриваемых в данном разделе, эта теорема не применима. Отметим также, что построены расходящиеся интерполяционные процессы и для формульных функций, например $f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$ и $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $x \in [-1; 1]$. Кроме того, применение многочленов высоких степеней приводит к так называемым «провалам» между узлами интерполяции, часто называемым *осцилляциями*. Указанные свойства интерполяционных процессов обусловливают нецелесообразность применения интерполяционных многочленов высоких степеней. В связи с этим в вычислительной практике для сеточных функций степень n не берут выше $5 \div 8$ ($n \le 5 \div 8$) и задание частичного отрезка согласуют с выбранной степенью многочлена.

Рассмотрим часто использующиеся на практике линейную и параболическую интерполяцию.

ЛИНЕЙНАЯ И ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА

В прикладных расчетах часто применяется простейшая кусочная интерполяция, основанная на многочленах первой степени $L_1(x)$ или второй степени $L_2(x)$. В этом случае функциональная интерполяция называется *линейной* или *параболической* (*квадратичной*) соответственно. Рассмотрим возможные способы их реализации и найдем оценки их погрешностей.

Пусть для сеточной функции $y_i = f(x_i)$, заданной на сетке $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, требуется выполнить интерполяционный процесс для определения значения $f(x_*)$, где $x_* \ne x_i$ $(i = \overline{0, n})$, и оценить погрешности. Для обоснованного выбора степени интерполяционного многочлена необходимо указать, какую погрешность имеют значения исходной функции $f(x_i)$ в узлах. Если эта погрешность составляет величину $O\left(h_{i+1}^2\right)$ или $O\left(h_{i+1}^3\right)$, а в широком классе вычислительных задач обеспечиваются именно такие погрешности, следует использовать линейную или параболическую интерполяцию.

Методика решения задачи линейной интерполяции

1. По расположению заданной точки x_* на оси Ox выбрать из всех частичных отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_i, x_{i+1}]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, заданных своими крайними значениями и в совокупности образующих сетку Ω_n, «окно» интерполяции $O \equiv [x_i, x_{i+1}]$, такое, что $x_i < x_* < x_{i+1}$.

2. Для отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ вычислить значения коэффициентов Лагранжа $P_{1i}(x_*) = \dfrac{x_* - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$ и $P_{1i+1}(x_*) = \dfrac{x_* - x_i}{x_{i+1} - x_i}$, входящих в формулу (4.13) для многочлена $L_1(x)$. Правильность полученных значений $P_{1i}(x_*)$, $P_{1i+1}(x_*)$ проверить по условию $P_{1i}(x_*) + P_{1i+1}(x_*) = 1$, которое должно выполняться.

3. Вычислить искомое значение $f(x_*)$ согласно (4.13):

$$f(x_*) \approx L_1(x_*) = P_{1i}(x_*)f_i + P_{1i+1}(x_*)f_{i+1}.$$

Как показано ниже, порядок этой аппроксимации равен двум, т. е. $O\left(h_{i+1}^2\right)$.

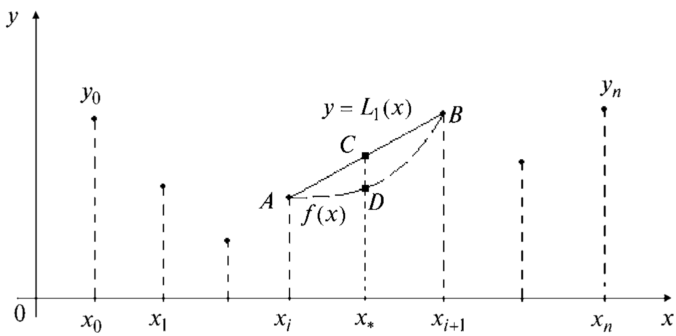


Рис. 4.3

Геометрическая интерпретация линейной интерполяции при известной формульной функции $y = f(x)$ (штриховая линия) изображена на рисунке 4.3. Здесь прямая AB соответствует графику функции $y = L_1(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Приближенное значение функции равно $L_1(x_*)$ (точка C), и оно отстоит от точного значения $f(x_*)$ на величину $CD \approx O\left(h_{i+1}^2\right)$ вдоль оси Oy.

Методика решения задачи параболической интерполяции

1. Из всей совокупности спаренных частичных отрезков $[x_0, x_2]$, $[x_1, x_3]$, ..., $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, $[x_i, x_{i+2}]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, образующих сетку Ω_n, по заданной величине x_* выбрать два пересекающихся «окна» $O_1 \equiv [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $O_2 \equiv [x_i, x_{i+2}]$ (предполагается, что x_* принадлежит внутреннему отрезку $[x_i, x_{i+1}]$).

2. Для «окон» O_1 и O_2 вычислить значения коэффициентов Лагранжа: $P_{2,i-1}^{(1)}(x_*)$, $P_{2,i}^{(1)}(x_*)$, $P_{2,i+1}^{(1)}(x_*)$ — для «окна» O_1 и $P_{2,i}^{(2)}(x_*)$, $P_{2,i+1}^{(2)}(x_*)$, $P_{2,i+2}^{(2)}(x_*)$ — для «окна» O_2. Путем суммирования проверить правильность полученных значений коэффициентов:

$$\left(\sum_{k=i-1}^{i+1} P_{2,k}(x_*) = 1 \text{ и } \sum_{k=i}^{i+2} P_{2,k}(x_*) = 1\right).$$

3. Используя значения коэффициентов Лагранжа, вычислить значения $L_2^{(1)}(x_*)$, $L_2^{(2)}(x_*)$ по формуле (4.14).

Если в расчетах не требуется высокая точность интерполирования, то можно ограничиться выбором одного «окна», например O_2, и тогда $f(x_*) \approx L_2^{(2)}(x_*)$. Для достижения повышенной точности интерполяцию провести для двух «окон» и результаты $L_2^{(1)}(x_*)$, $L_2^{(2)}(x_*)$ осреднить:

$$f(x_*) \approx \left[L_2^{(1)}(x_*) + L_2^{(2)}(x_*)\right]/2 \equiv L_{2\text{ср}}(x_*).$$

При этом порядок интерполяции повышается на единицу, т. е. $L_2(x_*)$ аппроксимирует точное значение с четвертым порядком, поскольку погрешность составляет величину $O(H^4)$, где $H = \max\{h_i, h_{i+1}, h_{i+2}\}$.

Замечание. Если $x_* \in [x_0, x_2]$ или $x_* \in [x_{n-1}, x_n]$, то выбирается одно «окно» $[x_0, x_2]$ или $[x_{n-1}, x_n]$ соответственно.

Геометрическая интерпретация параболической интерполяции изображена на рисунке 4.4. Параболе $y = L_2^{(1)}(x)$ соответствует кривая $A_1A_2B_1$, параболе $y = L_2^{(2)}(x)$ — кривая $A_2B_1B_2$. Точка C соответствует значению $L_2^{(1)}(x_*)$, точка D — значению $L_2^{(2)}(x_*)$, точка E — значению $L_2(x_*)$.

Приведем *оценки погрешностей* линейной и параболической интерполяции. Вначале предположим, что сетка Ω_n равномерная (это имеет значение только для параболической интерполяции). Формулы (4.13), (4.14) и оценки (4.22), записанные для «окон» интерполяции, упрощаются, если ввести в рассмотрение новую переменную — *фазу интерполяции* $u = \dfrac{x - x_i}{h}$:

$$L_1(u) = (1-u)f_i + uf_{i+1}; \quad L_2(u) = \frac{(u-1)(u-2)}{2}f_i - u(u-2)f_{i+1} + \frac{u(u-1)}{2}f_{i+2}.$$

Здесь учтено, что $x - x_{i+1} = x - (x_i + h) = uh - h = h(u-1)$, $x - x_{i+2} = h(u-2)$. Очевидно, что для $L_1(u)$ величина u изменяется в диапазоне $0 \le u \le 1$, а для $L_2(u)$ — в диапазоне $0 \le u \le 2$. Для получения мажорант в оценке (4.22) необходимо найти $\max|\omega_1(x)|$ и $\max|\omega_2(x)|$. Преобразуя зависимости $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$

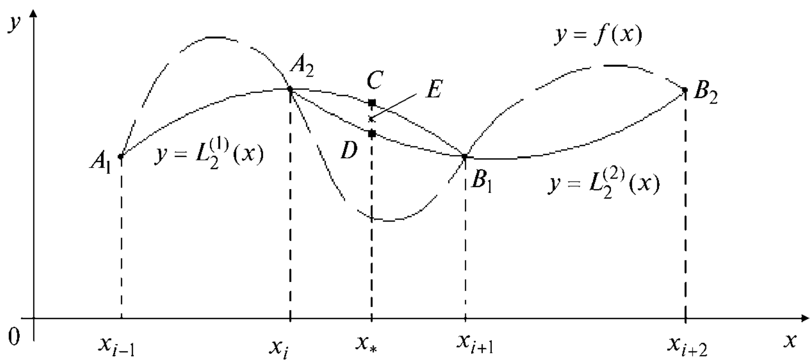


Рис. 4.4

к новой переменной u, получаем $\omega_1(u) = h^2 u \cdot (1 - u)$, $\omega_2(u) = h^3 u \cdot (1 - u) \cdot (2 - u)$ и находим максимумы:

$$\Omega^1 = \max_{0 \le u \le 1} |\omega_1(u)| = \frac{h^2}{4}; \quad \Omega^2 = \max_{0 \le u \le 2} |\omega_2(u)| = \frac{2\sqrt{3}h^2}{9}.$$

Таким образом, реализуются следующие оценки погрешностей линейной и параболической интерполяции, справедливых для соответствующих «окон»:

$$|f(u) - L_1(u)| \le \frac{h^2}{8} M_{2,i}; \tag{4.23}$$

$$|f(u) - L_2(u)| \le \frac{\sqrt{3}h^3}{27} M_{3,i}, \tag{4.24}$$

где $M_{2,i} = \max\limits_{[x_i,\, x_{i+1}]} |f''(x)|$, $M_{3,i} = \max\limits_{[x_i,\, x_{i+2}]} |f'''(x)|$. При этом предполагается, что $f(x)$ принадлежит классам функций $f(x) \in C_2[a, b]$, $f(x) \in C_3[a, b]$ соответственно для линейной и параболической интерполяции. Таким образом, из оценок (4.23), (4.24) следует, что линейная интерполяция обеспечивает на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ второй порядок аппроксимации или погрешности по h, а параболическая (без осреднения) на двойном отрезке $[x_i, x_{i+2}]$ — третий порядок. Данные погрешности, как отмечалось во введении и предыдущих разделах, сокращенно записываются как $O(h^2)$ и $O(h^3)$. При реализации алгоритма с осреднением порядок параболической интерполяции становится равным $O(h^4)$.

Замечания

1. Оценка (4.23) для линейной интерполяции инвариантна по отношению к виду сетки Ω_n (равномерной или неравномерной). Параболическая интерполяция также сохраняет указанную погрешность при выполнении интерполяции на неравномерной сетке Ω_n. В [13] для $L_2(x)$ при выполнении условия $f(x) \in C_3[a, b]$ приведена оценка

$$\max_{[x_i,\, x_{i+2}]} |R_2(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{27} H^3 M_{3,i}, \tag{4.25}$$

где $H = \max(h_{i+1}, h_{i+2})$, $h_{i+2} = x_{i+2} - x_{i+1}$, $M_{3,i} = \max\limits_{[x_i, x_{i+2}]} |f'''(x)|$.

2. Если гладкость функции $f(x)$ не достигает вышеуказанной и класс гладкости понижен на единицу ($f(x) \in C_2[a, b]$), то порядок параболической интерполяции также понижается на единицу:

$$\max_{[x_i,\, x_{i+2}]} |R_2(x)| \le 0{,}1546 \cdot H^2 M_{2,i}. \tag{4.26}$$

3. Повышение класса гладкости функции $f(x)$ выше $C_3[a, b]$ не приводит к увеличению порядка параболической интерполяции относительно H, т. е. происходит как бы его «замораживание» или «насыщение». Указанные свойства, вытекающие из оценок (4.25), (4.26), носят общий характер и имеют место в других оценках аппроксимации многочленов, сплайнов, производных и интегралов.

4. Для произвольной степени интерполяционного многочлена при $h = \text{const}$, $f(x) \in C_{n+1}[a, b]$ погрешность функциональной интерполяции на отрезке $[x_0, x_n]$ выражается следующим образом [6]:

$$\| f(x) - L_n(x) \|_{[a,b]} = \max_{[a,b]} | f(x) - L_n(x) | \le h^{n+1} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \Omega^n, \tag{4.27}$$

где $\Omega^n = \max\limits_{0 \le u \le n} |\omega_n(u)|$, $M_{n+1} = \max\limits_{[x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$, $\omega_n(u) = u(u-1) \cdot \ldots \cdot (u-n)$. Для многочленов с $n \le 5$ величины Ω^n или их оценки являются такими: $\Omega^1 = \dfrac{1}{4}$; $\Omega^2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$; $\Omega^3 = 1$; $\Omega^4 < 3{,}7$; $\Omega^5 < 17$. Из (4.27) следует, что на отрезке $[x_0, x_n]$ величина $\|R_n(x)\|$ есть $O(h^{n+1})$ и при уменьшении шага h в два раза мажоранта уменьшается по крайней мере в 2^{n+1} раз. Отсюда вытекает, что для непрерывных функций можно по заданной точности интерполяции выбирать шаг h. При этом можно путем использования кусочной интерполяции в некоторых пределах изменять степень интерполяционного многочлена. Мажоранту в оценке (4.27) при кусочной интерполяции можно также снизить путем выбора «окна» интерполяции $[x_i, x_{i+k}]$ так, чтобы точка x_* располагалась как можно ближе к его середине. Это обусловлено тем, что колебания функции $\omega_n(x)$ вблизи середины $[x_i, x_{i+k}]$ меньше, чем у его концов [6].

5. В широком классе задач математической физики применяются расчетные схемы в основном второго (и иногда третьего и выше) порядка точности. При их реализации, как правило, используются встроенные интерполяционные алгоритмы, основанные на многочленах и сплайн-функциях. Степени интерполяционных многочленов при этом должны выбираться из условия соответствия порядков их аппроксимации порядкам точности схем. Если эти порядки одинаковы, то порядок точности схем сохраняется, хотя константа в оценке погрешности схемы изменяется. Если же порядок встроенных интерполяционных алгоритмов хотя бы на единицу выше порядка точности схемы, то вместе с порядком точности схемы сохраняется и указанная константа. Отсюда следует, что необходимо выбирать такую степень интерполяционного многочлена, которая либо обеспечивает равенство порядка аппроксимации порядку точности схемы, либо на единицу превышает последний. Таким образом, использование параболической интерполяции в качестве встроенных алгоритмов или для восполнения численных решений, полученных по схемам второго порядка, позволяет сохранить требуемую точность расчета, а также не дает избыточный порядок и, следовательно, не усложняет алгоритм. Это замечание носит общий характер и относится к любым аппроксимационным алгоритмам, выполняющим функцию восполнения или интерполирования.

Перейдем к рассмотрению примеров решения задач линейной и параболической интерполяции.

Пример 4.3. Дана сеточная функция, являющаяся сеточным представлением формульной функции $f(x) = x^3$ (табл. 4.4).

Найти значение $f(x_*)$ при $x_* = 2$ с помощью линейной и параболической интерполяции.

Таблица 4.4

i	0	1	2	3	4
x_i	–1	0	1	3	4
f_i	–1	0	1	27	64

□Применение линейной интерполяции. Воспользуемся методикой.

1. Выбираем «окно» интерполяции $[x_i, x_{i+1}] = [1; 3]$ $(i = 2, i + 1 = 3)$.

2. Вычислим коэффициенты Лагранжа:

$$P_{12} = \frac{x_* - x_3}{x_2 - x_3} = 0{,}5; \quad P_{13} = \frac{x_* - x_2}{x_3 - x_2} = 0{,}5.$$

Вычисления выполнены верно, так как $P_{12} + P_{13} = 1$.

3. Определим искомое значение $f(2)$ по формуле (4.13):

$$f(2) \approx L_1(2) = P_{12}f_2 + P_{13}f_3 = 14.$$

Применение параболической интерполяции с осреднением. Также воспользуемся соответствующей методикой.

1. Выбираем «окна» интерполяции $O_1 \equiv [x_1; x_3] = [0; 3]$; $O_2 \equiv [x_2; x_4] = [1; 4]$.

2. Вычислим коэффициенты Лагранжа $P_{21}^{(1)}$, $P_{22}^{(1)}$, $P_{23}^{(1)}$ для «окна» O_1 и $P_{22}^{(2)}$, $P_{23}^{(2)}$, $P_{24}^{(2)}$ для «окна» O_2. Получим $P_{21}^{(1)} = -\frac{1}{3}$, $P_{22}^{(1)} = 1$, $P_{23}^{(1)} = \frac{1}{3}$, $P_{22}^{(2)} = \frac{1}{3}$, $P_{23}^{(2)} = 1$, $P_{24}^{(2)} = -\frac{1}{3}$. Вычисления выполнены правильно, так как $\sum_{k=1}^{3} P_{2k}^{(1)} = 1$; $\sum_{k=2}^{4} P_{2k}^{(2)} = 1$.

3. Определим значения $L_2^{(1)}(x_*)$, $L_2^{(2)}(x_*)$ по формуле (4.14):

$$L_2^{(1)}(2) = -\frac{1}{3}\cdot 0 + 1\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 27 = 10; \quad L_2^{(2)}(2) = \frac{1}{3}\cdot 1 + 1\cdot 27 - \frac{1}{3}\cdot 64 = 6.$$

Искомое значение получим в результате осреднения:

$$f(2) \approx \frac{L_2^{(1)}(2) + L_2^{(2)}(2)}{2} = 8.$$

Найдено точное значение $f(2) = 8$, что объясняется тем, что оператор осреднения повышает порядок интерполяции. В этом случае в остаточное слагаемое входит $f^{(4)}(\xi) \equiv 0$ и оно равно нулю.■

4.2.3. МНОГОЧЛЕНЫ НЬЮТОНА

РАЗДЕЛЕННЫЕ И КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

В практике функционального интерполирования иногда удобнее использовать многочлены Ньютона, степень которых можно последовательно повышать путем добавления очередных слагаемых, имеющих более высокую степень. Такие несимметричные многочлены, альтернативные симметричным многочленам Лагранжа, основаны на разделенных и конечных разностях, вычисляемых по интерполируемой сеточной функции.

Разделенные разности вводятся для функции $y_i = f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,n}$, заданной на неравномерной сетке ($h_{i+1} = \text{var}$), а *конечные разности* — для функции $y_i = f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,n}$, определенной на равномерной сетке ($h_{i+1} = \text{const}$).

Выбрав внутри неравномерной или равномерной сетки соответствующие шаблоны интерполяции (x_i, x_{i+1}), (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), ..., $(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k})$, введем следующие определения разделенных и конечных разностей:

- *разделенная разность первого порядка*:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i};$$

- *разделенная разность второго порядка*:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i};$$

....

- *разделенная разность k-го порядка*:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i};$$

- *конечная разность первого порядка*:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i;$$

- *конечная разность второго порядка*:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i;$$

....

- *конечная разность k-го порядка*:

$$\Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f_{i+j},$$

где $C_k^j = \dfrac{k!}{(k-j)!\,j!}$.

Последовательность получения разделенных и конечных разностей при $k = 3$ для произвольной функции наглядно представляют таблицы 4.5 и 4.6.

Для гладких функций числовые значения $f(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k})$ и $\Delta^k f_i$ при возрастании k уменьшаются и стремятся к нулю, т. е. $f(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}) \to 0$ и $\Delta^k f_i \to 0$ при $k \to \infty$.

Связь между разделенными и конечными разностями k-го порядка при $h = \text{const}$ устанавливается следующим соотношением:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{\Delta^k f_i}{k!\,h^k}. \qquad (4.28)$$

Действительно, при $k = 1$ для разделенной разности $f(x_i, x_{i+1})$ получаем

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta f_i}{1!\,h^1},$$

т. е. (4.28) при $k = 1$ справедливо.

Таблица 4.5

x_j	f_j	$f(x_j, x_{j+1})$	$f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})$	$f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3})$
x_i	f_i	$f(x_i, x_{i+1})$		
x_{i+1}	f_{i+1}	$f(x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
x_{i+2}	f_{i+2}	$f(x_{i+2}, x_{i+3})$	$f(x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$	
x_{i+3}	f_{i+3}			

Таблица 4.6

x_j	f_j	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$
x_i	f_i	Δf_i		
x_{i+1}	f_{i+1}	Δf_{i+1}	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_{i+2}	f_{i+2}	Δf_{i+2}	$\Delta^2 f_{i+1}$	
x_{i+2}	f_{i+2}			

Пусть $k = 2$. Тогда получаем

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} =$$

$$= \frac{1}{2h}\left(\frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{h} - \frac{f_{i+1} - f_i}{h}\right) = \frac{\Delta f_{i+1} - \Delta f_i}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}.$$

Таким образом, связь (4.28) выполняется и при $k = 2$. Справедливость (4.28) при произвольном k можно доказать методом математической индукции.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН НЬЮТОНА ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ

Пусть исходная (интерполируемая) сеточная функция $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, задана на неравномерной сетке $\Omega_n \equiv \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, характеризующейся шагами $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i = \text{var}$.

Воспользуемся сначала *кусочным способом*. Из всей совокупности узлов выбираем шаблон $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$, соответствующий некоторому «окну» интерполяции $[x_i, x_{i+k}]$.

Тогда для функциональной интерполяции может быть использован *многочлен Ньютона*, основанный на разделенных разностях:

$$N_k(x) = f_i + f(x_i, x_{i+1}) \cdot (x - x_i) + f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) \cdot (x - x_i) \cdot (x - x_{i+1}) + \ldots +$$
$$+ f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) \cdot (x - x_i) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i+k-1}). \quad (4.29)$$

Действительно, $N_k(x)$ — многочлен k-й степени, что определяется сомножителями последнего слагаемого (разделенные разности, входящие в качестве одного из сомножителей в эти произведения, есть числа). Кроме того, для многочлена $N_k(x)$ удовлетворяются функциональные условия интерполяции: $N_k(x_j) = f_j$, $j = i, \ldots, i + k$. Проверим их справедливость при $k = 1$ (шаблон (x_i, x_{i+1})) и $k = 2$ (шаблон (x_i, x_{i+1}, x_{i+2})).

Пусть $k = 1$. Тогда

$$N_1(x) = f_i + f(x_i, x_{i+1})(x - x_i), \tag{4.30}$$

и поэтому

$$N_1(x_i) = f_i; \quad N_1(x_{i+1}) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+1} - x_i) = f_{i+1}.$$

Таким образом, условия интерполяции для $N_1(x)$ выполнены, следовательно, многочлен (4.30) может быть использован для линейной интерполяции кусочным способом.

Пусть $k = 2$. Тогда

$$N_2(x) = f_i + f(x_i, x_{i+1})(x - x_i) + f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})(x - x_i)(x - x_{i+1}), \tag{4.31}$$

и поэтому

$$N_2(x_i) = f_i; \quad N_2(x_{i+1}) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+1} - x_i) + 0 = f_{i+1};$$

$$N_2(x_{i+2}) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+2} - x_i) + \frac{1}{x_{i+2} - x_i}\left(\frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\times$$
$$\times(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1}) = f_{i+2}.$$

Таким образом, условия интерполяции для многочлена $N_2(x)$ также выполнены, и он может использоваться для параболической интерполяции кусочным способом.

Для произвольного k справедливость равенств $N_k(x_i) = f_i$, $j = \overline{i, i+k}$, проверяется методом математической индукции.

Полагая $i = 0$, $k = n$, приходим к *глобальному способу*. Тогда *интерполяционный многочлен Ньютона n-й степени* имеет вид

$$N_n(x) = f_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}). \tag{4.32}$$

Замечания

1. Согласно теореме 4.1 многочлен Ньютона (4.32) является тождественным многочлену $\tilde{f}_n(x, \bar{a}) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ с коэффициентами, получаемыми из системы (4.10), либо многочлену Лагранжа, т. е. $L_n(x) = N_n(x) = \tilde{f}_n(x, \bar{a})$, если узлы интерполяции и интерполируемая функция одинаковы.

2. Интерполяционный многочлен Ньютона (4.29) или (4.32) (так же, как и многочлен Ньютона, выражаемый ниже через конечные разности) записан не через значения функции, как это имеет место для многочлена Лагранжа, а через разделенные разности. Поэтому при изменении степени k в процессе интерполирования у многочлена Ньютона $N_k(x)$ требуется только добавить или отбросить соответствующее число слагаемых. Это иногда упрощает алгоритм интерполирования.

3. При интерполяции на основе (4.29) или (4.32) узлы интерполяции x_i, x_{i+1}, …, x_{i+k} или x_0, x_1, …, x_n, определяющие шаблоны интерполяции, целе-

сообразно выбирать так, чтобы точка x_* была расположена возможно ближе к середине отрезка $[x_i, x_{i+k}]$ или $[x_0, x_n]$.

4. Остаточное слагаемое многочлена (4.32) совпадает с остаточным слагаемым многочлена Лагранжа, и оценки (4.21), (4.22), справедливые для точки x_* и всего отрезка $[x_0, x_n]$, сохраняются.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НЬЮТОНА ДЛЯ РАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ

Сначала рассмотрим решение задачи *кусочной интерполяции* (применение кусочного способа). Если функция $y_i = f(x_i)$ $(i=\overline{0,n})$ задана на равномерной сетке Ω_n, характеризующейся $h_{i+1} = \text{const}$ для всех i, то многочлен (4.29), соответствующий шаблону $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$, путем подстановки в него вместо разделенных разностей их выражений через конечные разности, согласно (4.28), преобразуется к виду

$$N_k^{(\mathrm{I})}(q) = f_i + \frac{\Delta f_i}{1!}q + \frac{\Delta^2 f_i}{2!}q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^k f_i}{k!}q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-k+1), \qquad (4.33)$$

где $q = \dfrac{x - x_i}{h}$ — *фаза интерполяции*, определенная относительно точки x_i; $\Delta^j f_i (j = 1, 2, \ldots, k)$ — конечные разности.

В соответствии с формулой для фазы интерполяции q точка начала ее отсчета расположена в узле x_i, и входящие в (4.33) конечные разности относятся к этой же точке x_i. В связи с этим (4.33) удобно применять в начале выделенного шаблона $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$, когда $q > 0$. Если $x_i = x_0$, а $x_* < x_0$, то этот же многочлен используется и для экстраполяции левее точки $x_0 (q < 0)$. Поэтому многочлен $N_k^{(\mathrm{I})}(q)$ называется *интерполяционным многочленом для интерполяции вперед* (*в начале таблицы*) или *для экстраполяции назад*. В (4.33) этот многочлен обозначен цифрой I, указанной в скобках вверху. Для определенности назовем его *первым интерполяционным многочленом Ньютона*.

Полагая $i = 0$, $k = n$, получаем решение задачи *глобальной интерполяции* на всем отрезке $[x_0, x_n]$:

$$N_n^{(\mathrm{I})}(q) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}q + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^n f_0}{n!}q(q-1)\ldots(q-n+1), \qquad (4.34)$$

где $q = \dfrac{x - x_0}{h}$. Остаточное слагаемое этого многочлена имеет вид

$$R_n(q) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

где $\xi \in (a, b)$ — некоторое промежуточное значение между узлами $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и точкой x.

Если фазу интерполяции определить относительно x_{i+k} некоторой конечной точки шаблона $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$, т. е. $\hat{q} = \dfrac{x - x_{i+k}}{h}$, то вместо (4.33) получается *второй интерполяционный многочлен Ньютона*:

$$N_k^{(\mathrm{II})}(\hat{q}) = f_{i+k} + \frac{\Delta f_{i+k-1}}{1!}\hat{q} + \frac{\Delta^2 f_{i+k-2}}{2!}\hat{q}(\hat{q}+1) + \ldots + \frac{\Delta^k f_i}{k!}\hat{q}(\hat{q}+1)\ldots(\hat{q}+k-1). \quad (4.35)$$

Данный многочлен удобно применять в конце выделенного шаблона или всей таблицы $y_i = f(x_i)$ $(i = \overline{0, n})$.

Если $i + k = n$, а $x_* > x_n$, то (4.35) используется для экстраполяции правее точки $x_n (\hat{q} > 0)$. Поэтому многочлен $N_k^{(\mathrm{II})}(\hat{q})$ называется *многочленом для интерполяции назад* (*в конце таблицы*) или *экстраполяции вперед*.

Полагая $i = 0$, $i + k = n$, получаем решение задачи *глобальной интерполяции — второй интерполяционный многочлен Ньютона n-й степени*:

$$N_n^{(\mathrm{II})}(\hat{q}) = f_n + \frac{\Delta f_{n-1}}{1!}\hat{q} + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!}\hat{q}(\hat{q}+1) + \ldots + \frac{\Delta^n f_0}{n!}\hat{q}(\hat{q}+1)\ldots(\hat{q}+n-1), \quad (4.36)$$

где $\hat{q} = \dfrac{x - x_n}{h}$.

Остаточное слагаемое многочлена (4.36) имеет вид

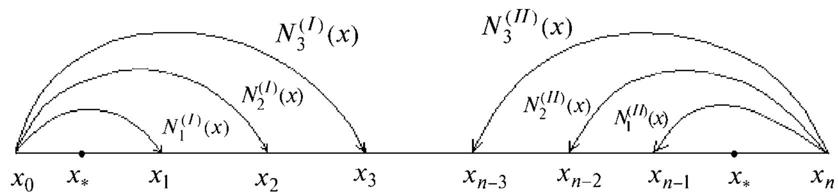
$$R_n(\hat{q}) = h^{n+1}\frac{\hat{q}(\hat{q}+1)\ldots(\hat{q}+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где $\xi \in (a, b)$.

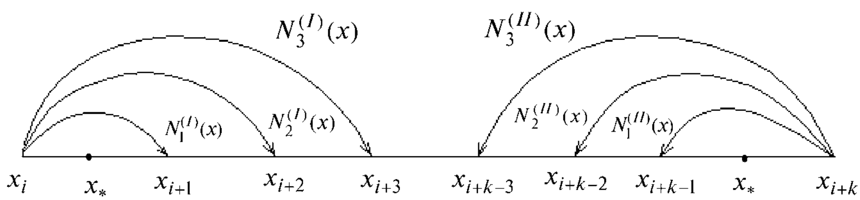
Схема выбора узлов интерполяции при изменении степеней интерполяционных многочленов $N_k^{(\mathrm{I})}(q)$, $N_k^{(\mathrm{II})}(\hat{q})$ $(k = 1, 2, 3)$ в одном алгоритме показана на рисунке 4.5. Если точка x_* находится в начале отрезка $[x_0, x_n]$, например на частичном отрезке $[x_0, x_1]$, то применяется первый интерполяционный многочлен Ньютона, а если в конце, например на частичном отрезке $[x_{n-1}, x_n]$, то — второй (рис. 4.5*а*). Если точка x_* находится вдали от концов отрезка $[x_0, x_n]$, то может применяться как первый интерполяционный многочлен, так и второй (рис. 4.5*б*).

Замечания

1. Из формул интерполяционных многочленов $N_k^{(\mathrm{I})}(q)$ и $N_k^{(\mathrm{II})}(\hat{q})$ видно, что повышение их степеней в процессе реализации алгоритма не требует пе-



а



б

Рис. 4.5

ресчета предыдущих слагаемых, входящих в многочлены с меньшими степенями.

2. Для гладких функций при повышении порядка конечных разностей справедливо свойство: $\Delta^k f_i \to 0$ при $k \to \infty$, и поэтому, как только очередное слагаемое в рассматриваемых многочленах становится меньше требуемой точности интерполяции, увеличение степени $N_k^{(\mathrm{I})}(q)$, $N_k^{(\mathrm{II})}(\hat{q})$ следует прекратить. Это замечание справедливо также и для $N_k(x)$.

Пример 4.4. Построить многочлен Ньютона третьей степени для сеточной функции, заданной таблицей 4.7. Вычислить значение функции в точке $x_* = 2{,}5$. Решить задачу интерполяции при включении одного дополнительного значения сеточной функции: $f(1) = 5$.

Таблица 4.7

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
$f(x_i) = f_i$	7	5	8	7

☐Построим многочлен Ньютона (4.32), справедливый для произвольного расположения узлов. Для этого составим таблицу 4.8, аналогичную таблице 4.5:

$$f(x_0, x_1) = \frac{5-7}{3-2} = -2;\ f(x_1, x_2) = \frac{8-5}{4-3} = 3;\ f(x_2, x_3) = \frac{7-8}{5-4} = -1;$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{3-(-2)}{4-2} = \frac{5}{2};\ f(x_1, x_2, x_3) = \frac{-1-3}{5-3} = -2;\ f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{-2-\frac{5}{2}}{5-2} = -\frac{3}{2}.$$

Таблица 4.8

x_i	f_i	$f(x_j, x_{j+1})$	$f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})$	$f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3})$
2	7			
		-2		
3	5		$\frac{5}{2}$	
		3		$-\frac{3}{2}$
4	8		-2	
		-1		
5	7			

По формуле (4.32) для $n = 3$ имеем

$$N_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) +$$
$$+(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 7 + (x-2)\cdot(-2) + (x-2)\cdot(x-3)\cdot\frac{5}{2} +$$
$$+(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2}x + 62.$$

Поскольку в данной задаче заданы равностоящие узлы, воспользуемся также формулой (4.34) для первого интерполяционного многочлена Ньютона:

$$N_3^{(\mathrm{I})}(q) = f(x_0) + \frac{\Delta f_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} q \cdot (q-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!} q \cdot (q-1) \cdot (q-2),$$

где $q = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{x-2}{1} = x - 2$. Составим таблицу 4.9, аналогичную таблице 4.6.

Таблица 4.9

x_i	$f_i = f(x_i)$	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$
2	7			
		−2		
3	5		5	
		3		−9
4	8		−4	
		−1		
5	7			

Имеем: $\Delta f_0 = 5 - 7 = -2$; $\Delta f_1 = 8 - 5 = 3$; $\Delta f_2 = 7 - 8 = -1$; $\Delta^2 f_0 = 3 - (-2) = 5$; $\Delta^2 f_1 = -1 - 3 = -4$; $\Delta^3 f_0 = -4 - 5 = -9$. Поэтому

$$N_3^{(\mathrm{I})}(x) = 7 + \frac{(-2)}{1!} q + \frac{5}{2!} q \cdot (q-1) + \frac{(-9)}{3!} q \cdot (q-1) \cdot (q-2) = -\frac{3}{2} q^3 + 7q^2 - \frac{15}{2} q + 7 \Big|_{q = \frac{x-2}{1}} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 7 \cdot (x^2 - 4x + 4) - \frac{15}{2} \cdot (x-2) + 7 = -\frac{3}{2} x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2} x + 62.$$

Запишем также второй интерполяционный многочлен Ньютона (4.36):

$$N_3^{(\mathrm{II})}(x) = f_3 + \frac{\Delta f_2}{1!} \hat{q} + \frac{\Delta^2 f_1}{2!} \hat{q} \cdot (\hat{q}+1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!} \hat{q} \cdot (\hat{q}+1) \cdot (\hat{q}+2) \Big|_{\hat{q} = \frac{x - x_3}{1}} =$$

$$= 7 + \frac{(-1)}{1!} \hat{q} + \frac{-4}{2!} \hat{q} \cdot (\hat{q}+1) + \frac{(-9)}{3!} \hat{q} \cdot (\hat{q}+1) \cdot (\hat{q}+2) = -\frac{3}{2} \hat{q}^3 - \frac{13}{2} \hat{q}^2 - 6\hat{q} + 7 \Big|_{\hat{q} = x - 5} =$$

$$= -\frac{3}{2} x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2} x + 62.$$

Сравнивая с результатом примера 4.1, можно заключить, что $L_3(x) = N_3^{(\mathrm{I})}(x) = N_3^{(\mathrm{II})}(x)$. Это еще раз подтверждает единственность решения задачи интерполяции в классе многочленов, удовлетворяющих условиям теоремы 4.1.

Предположим, что в ходе некоторого эксперимента получен новый результат $f(1) = 5$, дополняющий заданную сеточную функцию. Тогда для ре-

Таблица 4.10

x_i	y_i	$f(x_j, x_{j+1})$	$f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})$	$f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3})$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
2	7				
		−2			
3	5		$\frac{5}{2}$		
		3		$-\frac{3}{2}$	
4	8		−2		$-\frac{3}{4}$
		−1		$-\frac{3}{4}$	
5	7		$-\frac{1}{2}$		
		$\frac{1}{2}$			
1	5				

шения задачи интерполяции с помощью многочлена Ньютона можно использовать уже полученный результат. Для этого дополним таблицу 4.8. Новый узел и соответствующее значение функции поместим в конце таблицы 4.10.

По формуле (4.34) имеем

$$N_4(x) = N_3(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= -\frac{3}{2}x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2}x + 62 + (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(-\frac{3}{4}) =$$
$$= -\frac{3}{2}x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2}x + 62 - \frac{3}{4}\cdot(x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120) =$$
$$= -\frac{3}{4}x^4 + 9x^3 - \frac{149}{4}x^2 + 62x - 28.$$

Легко проверить, что новый узел можно добавить и в начале таблицы, т. е. будет найден тот же многочлен $N_4(x)$. На рисунке 4.6 изображены полученные интерполяционные многочлены.

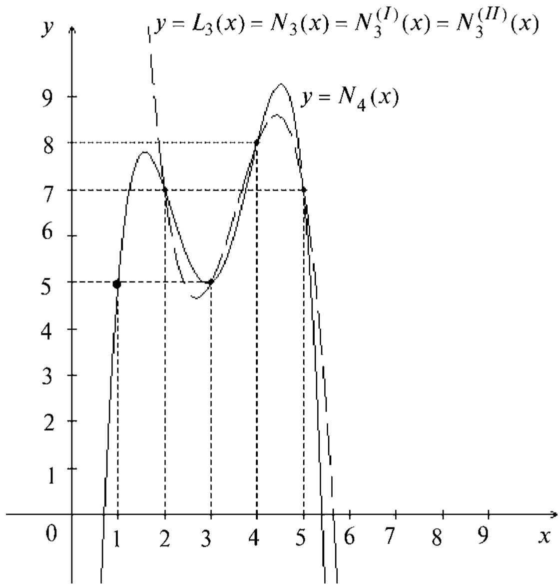


Рис. 4.6

Вычислим значение функции в точке $x_* = 2{,}5$:

$$N_3^{(\mathrm{I})}(x_*) = N_3^{(\mathrm{II})}(x_*) = 4{,}8125; \quad N_4^{(\mathrm{I})}(x_*) = 5{,}5156. \blacksquare$$

Пример 4.5. Для сеточной функции из примера 4.3 найти линейный и параболический многочлены Ньютона и на их основе подсчитать значение функции в точке $x_* = 2{,}5$. Оценить погрешность интерполяции.

□Так как точка $x_* = 2{,}5$ находится вблизи узла $x_i = x_2$ и шаблон (x_2, x_3, x_4) имеет неравномерность по шагу, то для выполнения интерполяции выбираем многочлен Ньютона (4.29).

Таблица 4.11

i	x_i	f_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
2	1	1		
			13	
3	3	27		8
			37	
4	4	64		

1. Определим разделенные разности $f(x_i, x_{i+1})$, $f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ (табл. 4.11).

Здесь $f(x_2, x_3) = \dfrac{27-1}{3-1} = 13,\ \ f(x_3, x_4) = \dfrac{64-27}{4-3} = 37,\ \ f(x_2, x_3, x_4) = \dfrac{37-13}{4-1} = 8.$
Определим $N_1(x)$, $N_2(x)$:

$$N_1(x) = f_2 + f(x_2, x_3)\cdot(x - x_2) = 1 + 13(x - 1) = 13x - 12;$$

$$N_2(x) = f_2 + f(x_2, x_3)\cdot(x - x_2) + f(x_2, x_3, x_4)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$= 13x - 12 + 8(x - 1)(x - 3) = 8x^2 - 19x + 12.$$

Сравнивая $N_2(x)$ с соответствующим многочленом Лагранжа $L_2(x)$ (см. пример 4.3), видим, что они совпадают. Это подтверждает единственность решения задачи о построении интерполяционного многочлена.

2. Вычислим значения $N_1(x)\big|_{x=x_*}$, $N_2(x)\big|_{x=x_*}$:

$$N_1(2,5) = 13\cdot 2,5 - 12 = 20;$$
$$N_2(2,5) = 8\cdot 2,5^2 - 19\cdot 2,5 + 12 = 14,5.$$

Итак, линейная интерполяция приводит к отличию от точного значения на $\left|\dfrac{20-15,625}{15,625}\right|\cdot 100\% = 28\%$, а квадратичная — на $\left|\dfrac{14,5-15,625}{15,625}\right|\cdot 100\% = 7\%$.

Таким образом, найдена фактическая погрешность, которая для квадратичной интерполяции получилась в 4 раза меньше.

3. Найдем априорную оценку погрешности линейной интерполяции на отрезке $[x_2, x_3]$ по формуле (4.23). Для этого необходимо сначала оценить производную $M_{2,i}$. При этом, как и в реальных задачах, будем определять $f''(x)$ численным дифференцированием. С этой целью используем многочлен $N_2(x)$: $N_2'(x) = 16x - 19$, $N_2''(x) = 16$. Приближенно можно принять, что $M_{2,i} = 16$. Тогда получаем

$$|R_1(x)| \le \frac{2^2}{8}\cdot 16 = 8 \ \text{ или } \ \frac{8}{15,625}\cdot 100\% = 51,2\%.$$

Заметим, что фактическая погрешность получилась примерно в два раза меньше априорной.■

Пример 4.6. Для сеточной функции, заданной в примере 4.4, построить интерполяционные многочлены первой и второй степени для нахождения значений в точках $x_{*1} = 2,5$; $x_{*2} = 4,5$; $x_{*3} = 3,5$; $x_{*4} = 5,5$.

□Для подсчета значения функции в точке $x_{*1} = 2,5$ (согласно рис. 4.5*а*) выбираем шаблон $(x_0,\ x_1,\ x_2) = (2;\ 3;\ 4)$ для параболической интерполяции

($i = 0$, $k = 2$) и шаблон $(x_0, x_1) = (2; 3)$ для линейной интерполяции ($i = 0$, $k = 1$). Тогда по формуле (4.34)

$$N_1^{(\mathrm{I})}(q) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}q = 7 + \frac{-2}{1!}q = 7 - 2q;$$

$$N_2^{(\mathrm{I})}(q) = N_1^{(\mathrm{I})}(q) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}q(q-1) = 7 - 2q + \frac{5}{2}q(q-1) = \frac{5}{2}q^2 - \frac{9}{2}q + 7,$$

где $\bar{a} = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}^T$ (см. табл. 4.9). В результате подстановки получаем

$$N_1^{(\mathrm{I})}(x) = -2x + 11; \quad N_2^{(\mathrm{I})}(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{29}{2}x + 26.$$

В заданной точке

$$N_1^{(\mathrm{I})}(2{,}5) = 6; \quad N_2^{(\mathrm{I})}(2{,}5) = 5{,}375.$$

Для подсчета значения в точке $x_{*2} = 4{,}5$ выбираем шаблон $(3; 4; 5) = (x_1, x_2, x_3)$ для параболической интерполяции ($i = 1$, $k = 2$) и шаблон $(4; 5) = (x_2, x_3)$ для линейной интерполяции ($i = 2$, $k = 1$). Тогда по формуле (4.35)

$$N_1^{(\mathrm{II})}(\hat{q}) = f_3 + \frac{\Delta f_2}{1!}\hat{q} = 7 + \frac{-1}{1!}\hat{q} = 7 - \hat{q};$$

$$N_2^{(\mathrm{II})}(\hat{q}) = N_1^{(\mathrm{II})}(\hat{q}) + \frac{\Delta^2 f_1}{2!}\hat{q}\cdot(\hat{q}+1) = 7 - \hat{q} + \frac{-4}{2}\hat{q}(\hat{q}+1) = -2\hat{q}^2 - 3\hat{q} + 7,$$

где $\hat{q} = \dfrac{x - x_3}{h} = x - 5$. В результате подстановки получаем

$$N_1^{(\mathrm{II})}(x) = -x + 12; \quad N_2^{(\mathrm{II})}(x) = -2x^2 + 17x - 28.$$

В заданной точке

$$N_1^{(\mathrm{II})}(4{,}5) = 7{,}5; \quad N_2^{(\mathrm{II})}(4{,}5) = 8.$$

Многочлен $N_2^{(\mathrm{II})}(x)$ можно использовать для экстраполяции, т. е. для подсчета функции в точке $x_{*4} = 5{,}5$: $N_2^{(\mathrm{II})}(5{,}5) = 5$.

Чтобы подсчитать значения в точке $x_{*3} = 3{,}5$, сначала выберем шаблон $(3; 4; 5) = (x_1, x_2, x_3)$ для параболической интерполяции ($i = 1$, $k = 2$) и шаблон $(3; 4) = (x_1, x_2)$ для линейной интерполяции ($i = 1$, $k = 1$). Согласно рисунку 4.5*б* применим формулу (4.33):

$$N_1^{(\mathrm{I})}(q) = f_1 + \frac{\Delta f_1}{1!}q = 5 + \frac{3}{1}q = 5 + 3q;$$

$$N_2^{(\mathrm{I})}(q) = N_1^{(I)}(q) + \frac{\Delta^2 f_1}{2!}q(q-1) = 5 + 3q + \frac{-4}{2}q(q-1) = -2q^2 + 5q + 5,$$

где $q = \dfrac{x - x_1}{h} = x - 3$. После подстановки получаем

$$N_1^{(\mathrm{I})}(x) = 3x - 4; \quad N_2^{(\mathrm{I})}(x) = -2x^2 + 17x - 28 \text{ и } N_1^{(\mathrm{I})}(3{,}5) = 6{,}5; \quad N_2^{(\mathrm{I})}(3{,}5) = 7.$$

Подсчитать значения в точке $x_{3*} = 3{,}5$ (согласно рис. 4.5*б*) можно, использовав шаблон $(2; 3; 4) = (x_0, x_1, x_2)$ для параболической интерполяции

$(i = 0, k = 2)$ и шаблон $(3; 4) = (x_1, x_2)$ для линейной интерполяции $(i = 1, k = 1)$. По формуле (4.35) получаем

$$N_1^{(\mathrm{II})}(\hat{q}) = f_2 + \frac{\Delta f_1}{1!}\hat{q} = 8 + \frac{3}{1}\hat{q};$$

$$N_2^{(\mathrm{II})}(\hat{q}) = N_1^{(\mathrm{II})}(\hat{q}) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}\hat{q} = 8 + \frac{3}{1}\hat{q}\cdot(\hat{q}+1) = \frac{5}{2}\hat{q}^2 + \frac{11}{2}\hat{q} + 8,$$

где $\hat{q} = \dfrac{x - x_2}{h} = x - 4$. После подстановки

$$N_1^{(\mathrm{II})}(x) = 3x - 4;\ \ N_2^{(\mathrm{II})}(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{29}{2}x + 26 \text{ и } N_1^{(\mathrm{II})}(3{,}5) = 6{,}5;\ \ N_2^{(\mathrm{II})}(3{,}5) = 5{,}875. \ \blacksquare$$

4.3. МЕТОДЫ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

4.3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Использование различных сочетаний функциональных, дифференциальных и интегральных условий согласования (4.2), (4.3), (4.5) позволяет конструировать различные типы интерполяционных или интерполяционно-сглаживающих многочленов. В данном разделе рассматриваются задачи построения двух интегрально-дифференциальных интерполяционных параболических многочленов $S_2^{(\mathrm{I})}(x)$ и $S_2^{(\mathrm{II})}(x)$.

Первый определяется по сеточной функции, заданной не только своими значениями f_i $(i = \overline{0, n-1})$, но и значениями интегралов I_i^{i+1} $(i = \overline{0, n-1})$. Так как для нахождения многочлена $S_2^{(\mathrm{I})}(x)$ используются совместно функциональное условие (4.3) и интегральное условие (4.5), то многочлен называется *интегрально-функциональным*. Поскольку функциональное условие (4.3) является частным случаем дифференциального условия (4.2), соответствующий метод относится к *интегрально-дифференциальным*.

Второй многочлен определяется по сеточной функции, заданной не только значениями производных $f_i^{(p)}$ $(i = \overline{0, n})$, но и значениями интегралов I_i^{i+1} $(i = \overline{0, n-1})$. Так как для нахождения многочлена $S_2^{(\mathrm{II})}(x)$ совместно используются дифференциальное условие (4.2) при $p = 1$ и интегральное условие (4.5), то многочлен (и соответствующий метод) называется *интегрально-дифференциальным*.

4.3.2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕН

Пусть некоторая сеточная функция, определенная в общем случае на неравномерной сетке $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, задана своими значениями $f_0, f_1, \ldots, f_n$ и интегралами $I_0^1,\ I_1^2,\ \ldots,\ I_{n-1}^n \left(I_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \right)$, которые могут быть предварительно рассчитаны по одной из квадратурных формул (см. главу 5). Будем считать, что точность заданных значений f_i и вычисленных интегралов